EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Mauricio Motta

EQUAÇÕES BÁSICAS PARA O VOLUME DE CONTROLE

- PORQUE ESTUDAR O VOLUME DE CONTROLE E NÃO O SISTEMA COMO UM TODO?

  1. COMPLEXIDADE (DISTORÇÕES E DEFORMAÇÕES CONTÍNUAS DOS FLUIDOS).
  2. INTERESSE POR UMA PARTE ESPECÍFICA TAL COMO UM EQUIPAMENTO (REATOR)

LEIS BÁSICAS DO SISTEMA:

1ª) CONSERVAÇÃO DE MASSA ⇒ A MASSA DE UM SISTEMA É CONSTANTE

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{SIST} = 0$$

$$M_{SIST} = \int_{MASSA} dm = \int_{V} \rho \, dV$$

2ª) SEGUNDA LEI DE NEWTON ⇒ PARA UM SISTEMA EM MOVIMENTO RELATIVO À UM REFERENCIAL ESTACIONÁRIO, A SOMA DE TODAS AS FORÇAS EXTERNAS QUE ATUAM NO SISTEMA É IGUAL A TAXA DE VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR DO SISTEMA COM O TEMPO

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{SISTEMA}$$

A QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR, $\vec{P}$, DO SISTEMA É DADA POR

$$\vec{P}_{SIST} = \int_{MASSA} \vec{v} \, dm = \int_{V(SIST)} \vec{v} \rho \, dV$$

3:) PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA EM UM SISTEMA

$$\delta Q + \delta W = dE$$

δQ = TX DE TRANSF. DE CALOR
δW = TAXA DE TRABALHO

EM TERMOS MÉDIOS, TEMOS:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{SIST}$$

ENERGIA TOTAL

$$E_{SIST} = \int_{MASSA\ (SIST)} e\, dm = \int_{V} e \rho\, dV$$

4:) SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

A VARIAÇÃO DE ENTROPIA DO SISTEMA É DADA PELA QUANTIDADE DE CALOR TROCADA COM O SISTEMA δQ A UMA CERTA TEMPERATURA T

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

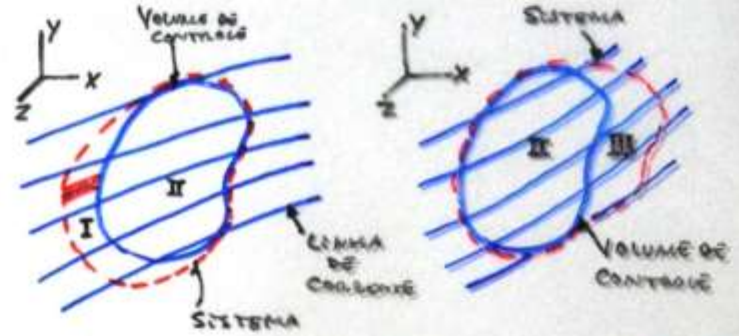
EM TERMOS MÉDIOS

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{SISTEMA} \geq \frac{1}{T}\dot{Q}$$

A ENTROPIA TOTAL DO SISTEMA É

$$S_{SISTEMA} = \int_{MASSA} s\, dm = \int_{V\ (SIST)} s \rho\, dV$$

APLICAÇÃO DO BALANÇO DE MASSA PARA OBTENÇÃO DA FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE



INSTANTE t   INSTANTE t+Δt

CONSIDEREMOS UM VOLUME DE CONTROLE NÃO DEFORMÁVEL, EM REPOU
E QUE SEJA SEMPRE PARTE DO SISTEMA.

O CAMPO DE VELOCIDADES **V** IMPULSIONA A REGIÃO I PARA O INTERIOR DA REGIÃO II EM Δt E A REGIÃO III SAI DA REGIÃO II EM Δt.

UMA VEZ QUE A MASSA DO SISTEMA É CONSTANTE, TEMOS QUE

$$m_{I,t} + m_{II,t} = m_{II,t+\Delta t} + m_{III,t+\Delta t}$$

REAGRUPANDO OS TERMOS E DIVIDINDO-OS POR Δt E TOMANDO O LIMITE QUANDO $\Delta t \to 0$, TEMOS:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{II,t+\Delta t} - m_{II,t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{I,t} - m_{III,t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (0)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{II,t+\Delta t} - m_{II,t}}{\Delta t} = \frac{dm_{vc}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(v.c)} \rho \, dV \quad (I)$$

ACÚMULO OU PERDA DE MASSA DO VOLUME DE CONTROLE

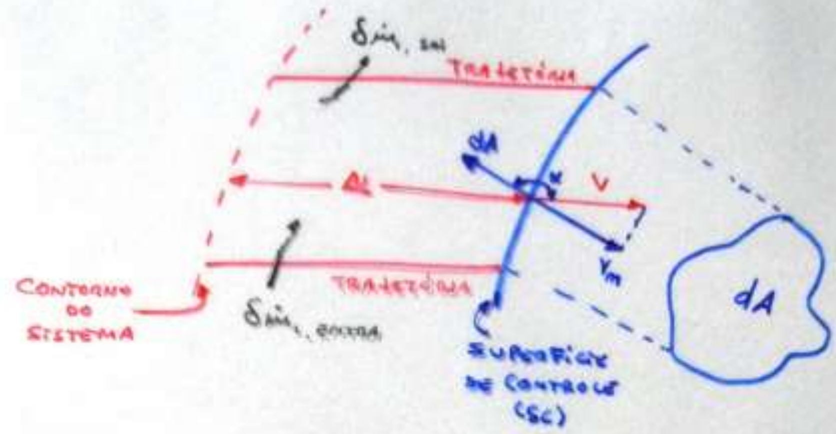


FIGURA - SUBREGIÃO NO INSTANTE t

PARA ANALISARMOS O FLUXO DE PARTÍCULAS, TOMEMOS UMA SUB-REGIÃO DA REGIÃO I

DA FIGURA ACIMA TEMOS QUE:

$\alpha > \pi/2 \Rightarrow$ FLUIDO ENTRA NA SUPERFÍCIE

ΔL = COMPRIMENTO MÉDIO DA SUB-REGIÃO

O VOLUME DA SUB-REGIÃO É DADO, ENTÃO, POR:

$$dV_1 = -(\Delta L \cos\alpha \, dA)_1$$

COS α NEGATIVO POIS $\alpha > \pi/2$ → NÃO PODEMOS TER VOLUME NEGATIVO

A MASSA DA SUB-REGIÃO É DADA POR

$$dm_1 = -(\rho \Delta L \cos\alpha \, dA)_1$$

INTEGRANDO-SE SOBRE A SUPERFÍCIE DE CONTROLE COMUM A REGIÃO I, TEMOS:

$$m_{I,t} = -\int_{S(SC,1)} (\rho \Delta L \cos\alpha \, dA)_1 \qquad \text{II}$$

--- MASSA TOTAL CONTIDA NA REGIÃO I NO TEMPO t

POR ANALOGIA, TEMOS PARA A REGIÃO III

$$m_{III,\, t+\Delta t} = + \int_{S(SC\,III)} (\rho\, \Delta L \cos\alpha \, dA)_{t+\Delta t} \qquad \text{III}$$

Porque está [redacted]

SUBSTITUINDO-SE I, II E III EM O, ENCONTRAMOS

$$\frac{d}{dt}\int_{V(VC)} \rho\, dV = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\int_{S(SC,I)}(\rho\,\Delta L \cos\alpha\, dA)_t - \int_{S(SC,III)}(\rho\,\Delta L \cos\alpha\, dA)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

OBSERVANDO-SE A SUB-REGIÃO, VEMOS QUE ΔL É A DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA PARTÍCULA NO TEMPO Δt. PORÉM, AS TRAJETÓRIAS PODEM CONTER FLUIDOS QUE ATRAVESSAM O ESCOAMENTO NÃO PERMANENTE (δm_I). QUANDO $\Delta t \to 0$, $\delta m_{I,entra} \to \delta m_{I,SM}$ POIS AS TRAJETÓRIAS COINCIDEM COM AS LINHAS DE CORRENTE NO LIMITE.

COMO A ÁREA DA SUPERFÍCIE DE CONTROLE É INDEPENDENTE DO INTERVALO DE TEMPO, Δt PODE ENTRAR NA INTEGRAL. DESTA FORMA OBTEMOS

$$\frac{d}{dt}\int_{V(VC)} \rho\, dV = \lim_{\Delta t\to 0} \left[- \int_{S(SC,I)}\left(\rho\, \frac{\Delta L}{\Delta t} \cos\alpha\, dA\right)_t - \int_{S(SC,III)}\left(\rho\, \frac{\Delta L}{\Delta t} \cos\alpha\, dA\right)_{t+\Delta t} \right]$$

UMA VEZ QUE $A \neq A(t)$ E AS FUNÇÕES DOS INTEGRANDOS SÃO CONTÍNUAS, PODEMOS APLICAR A REGRA DE LEIBNIZ QUE DIZ QUE O LIMITE DA INTEGRAL É IGUAL À INTEGRAL DO LIMITE. TEM-SE AINDA QUE:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = V$$

E QUE A VEL. PERPENDICULAR $V_m = V \cos\alpha$

TEMOS ENTÃO QUE

$$\frac{d}{dt}\int_{V(VC)} \rho\, dV = - \int_{S(SC,I)} \rho\, V_m\, dA - \int_{S(SC,III)} \rho\, V_m\, dA$$

A SUPERFÍCIE DE CONTROLE TOTAL É COMPOSTA PELAS REGIÕES I E III

$$\int_{S(SC)} \rho V_m \, dA = \int_{S(SC,I)} \rho V_m \, dA + \int_{S(SC,III)} \rho V_m \, dA$$

OBTEMOS ASSIM

$$\frac{d}{dt}\int_{V(VC)} \rho \, d\mathcal{V} = -\int_{S(SC)} \rho V_m \, dA \quad \text{OU} \quad \frac{d}{dt}\int_{V(VC)} \rho \, d\mathcal{V} = -\int_{S(SC)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

COMO O VOLUME DE CONTROLE NÃO VARIA COM O TEMPO (Ñ DEFORMA)

$$\int_{V(VC)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} = -\int_{S(SC)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

FORMA INTEGRAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

PARA UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL
- $\rho = cte$
- VOL. DE CONTROLE → CTE

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \int_{V(VC)} d\mathcal{V} = \boxed{\frac{\partial [\rho \mathcal{V}]}{\partial t} = -\rho \int_{S(SC)} \vec{V} \cdot d\vec{A}}$$

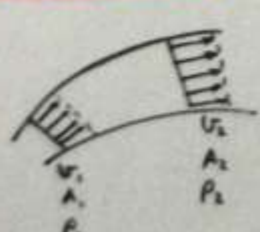
$$\cancel{\frac{\partial [\rho \mathcal{V}]}{\partial t}} \to 0$$

$$\boxed{\int_{S(SC)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0}$$

PARA ESCOAMENTO PERMANENTE (IDEM)

$$\int_{S(SC)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{OU} \quad \sum (\rho V_m A)_{ENTRA} = \sum (\rho V_m A)_{SAI}$$

ESCOAMENTO PERMANENTE UNIDIMENSIONAL INCOMPRESSÍVEL



$$\sum (\rho V_m A)_{ENTRA} = \sum (\rho V_m A)_{SAI} \rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

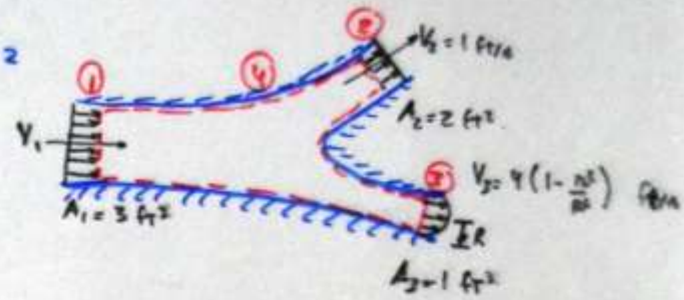
P/ FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS $\rho = \rho_1 = \rho_2$

$$\boxed{V_1 A_1 = V_2 A_2}$$

EXEMPLO 1

- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL EM MODO ESTACIONÁRIO
- ESCOAMENTO { UNIDIMENSIONAL EM 1 E 2 ; PARABÓLICO EM 3

PEDE-SE P/ CALCULAR V_1



SOLUÇÃO:

P/ ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO $\int_{S(SC)} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$

$$\int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} = \int_1 \cancel{\rho} \vec{V} d\vec{A} + \int_2 \cancel{\rho} \vec{V} d\vec{A} + \int_3 \cancel{\rho} \vec{V} d\vec{A} = 0$$ pois $\rho =$ cte

EM 1 $\alpha = \pi$ POIS VETOR NORMAL É OPOSTO AO VETOR VELOCIDADE

2 E 3 $\alpha = 0$

$$\int_1 \vec{V} d\vec{A} = -V_1 A_1$$

$$\int_2 \vec{V} dA = V_2 A_2$$

$$\int_3 \vec{V} dA = \int_3 V_3 (2\pi r\, dr)$$

ASSIM:

$$0 = -V_1 A_1 + V_2 A_2 + \int_0^R 4\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\, dr$$

$$0 = -V_1 A_1 + V_2 A_2 + 8\pi \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

SUBSTITUINDO-SE OS VALORES A_1, A_2, V_2

$$-3V_1 + 1 \cdot 2 + 8\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 0$$

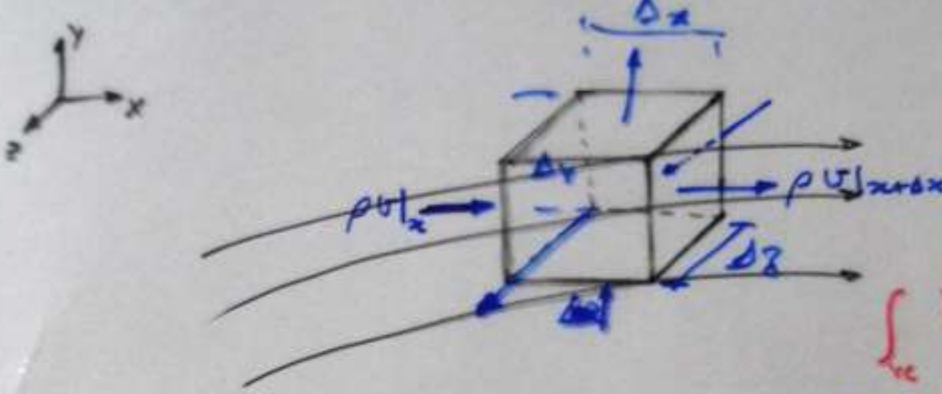
$$3V_1 = 2 + \overset{2}{\cancel{8}}\pi \left[\frac{R^2}{\cancel{4}}\right]$$

$$3V_1 = 2\left[1 + \underbrace{\pi R^2}_{A_3 = 1}\right]$$

$$V_1 = \frac{2}{3}[1 + 1] \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{4}{3} \text{ ft/s}}$$

7

Forma Diferencial da Equação da Continuidade



Forma integral

$$\int_{vc} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall = -\int_{sc} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{(I)}$$

Considerações:
- Volume de controle infinitesimal
- Valor médio da densidade

$$\int_{vc} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_{vm} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \qquad \text{(II)}$$

Supondo-se fluxo uniforme nas faces

$$\int_{sc1} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = -(\rho v_x)_x\, \Delta y\, \Delta z \qquad \int_{sc2} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = (\rho v_x)_{x+\Delta x}\, \Delta y\, \Delta z$$

$$\int_{sc3} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = -(\rho v_y)_y\, \Delta x\, \Delta z \qquad \int_{sc4} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = (\rho v_y)_{y+\Delta y}\, \Delta x\, \Delta z$$

$$\int_{sc5} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = -(\rho v_z)_z\, \Delta x\, \Delta y \qquad \int_{sc6} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = (\rho v_z)_{z+\Delta z}\, \Delta x\, \Delta y$$

Somando-se todas as faces temos:

$$\int_{sc} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = \left[(\rho v_x)_{x+\Delta x} - (\rho v_x)_x\right]\Delta y\,\Delta z + \left[(\rho v_y)_{y+\Delta y} - (\rho v_y)_y\right]\Delta x\,\Delta z + \left[(\rho v_z)_{z+\Delta z} - (\rho v_z)_z\right]\Delta x\,\Delta y \qquad \text{(III)}$$

Substituindo-se II e III em I e ÷ por $\Delta x \Delta y \Delta z$ temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_{vm} + \frac{(\rho v_x)_{x+\Delta x} - (\rho v_x)_x}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y)_{y+\Delta y} - (\rho v_y)_y}{\Delta y} + \frac{(\rho v_z)_{z+\Delta z} - (\rho v_z)_z}{\Delta z} = 0$$

SENDO ρ O VALOR MÉDIO (UM.). FAZENDO Δx, Δy E Δz TENDEREM A ZERO, O VOLUME TENDE A P E O VALOR MÉDIO TENDE AO VALOR PONTUAL.

DA DEFINIÇÃO DE DERIVADA, TEMOS QUE OS TERMOS DE FLUXO NO LIMITE TORNAM-SE GRADIENTES NAS RESPECTIVAS DIREÇÕES.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0}$$

FORMA DIFERENCIAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A FORMULAÇÃO MAIS GERAL É DADA POR

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho \vec{v} = 0$$

ONDE A DIVERGÊNCIA PODE SER EXPRESSA EM QUALQUER COORDENADA COMO POR EXEMPLO AS CILÍNDRICAS.

$$\nabla . \rho \vec{v} \equiv \mathrm{div}\ \rho \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

PARA ESCOAMENTO PERMANENTE

$$\nabla . \rho \vec{v} = 0$$

PARA FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

$$\nabla \vec{v} = 0$$

MESMO QUANDO NÃO É ESTACIONÁRIO JÁ QUE $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

EXEMPLO 2

O ESCOAMENTO $\vec{U}(x,y,z) = x^2\vec{i} + (x+z)\vec{j} - 2xz\vec{k}$ É COMPRESSÍVEL OU INCOMPRESSÍVEL ?

SOLUÇÃO

SE FOR INCOMPRESSÍVEL DEVE SATISFAZER A CONDIÇÃO

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U_z}{\partial z} = -2x$$

$$2x + 0 - 2x = 0$$ $\Rightarrow$ LOGO O ESCOAMENTO É INCOMPRESSÍVEL

EXEMPLO 3

UM FLUIDO ESCOA AO LONGO DE UM DUTO CILÍNDRICO COM VELOCIDADE $U_z = Z\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cos wt$ COM R = RAIO DO DUTO.

AQUECEDORES E RESFRIADORES FAZEM A DENSIDADE VARIAR COM r E COM t.

EM $t = \frac{\pi}{w}$ $\rho = \rho_0$

PEDE-SE PARA DETERMINAR A EXPRESSÃO PARA A DENSIDADE

SOLUÇÃO: PARA UM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL NÃO PERMANENTE, A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE, EM COORDENADAS CILÍNDRICAS, É DADA POR:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho \cancel{U_r})^{U_r=0} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho U_\phi)}{\cancel{\partial \phi}} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0$$

NEM ρ NEM U_ϕ VARIAM COM ϕ