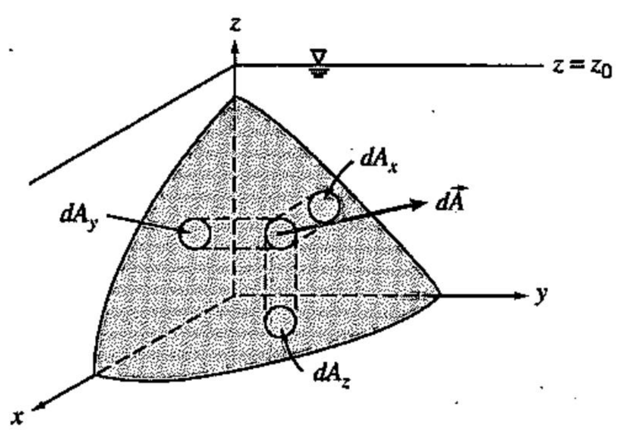
Forças Hidráulicas sobre uma Superfície Curva Submersa

Prof. Maurício Motta
DEQ - UFPE

DEVEMOS DEDUZIR EXPRESSÕES PARA A FORÇA RESULTANTE POR INTEGRAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO SOBRE A SUPERFÍCIE.

A FORÇA DE PRESSÃO É NORMAL À SUPERFÍCIE EM CADA PONTO. NESTE CASO OS ELEMENTOS INFINITESIMAIS DE ÁREA APONTAM EM DIVERSAS DIREÇÕES DEVIDO À CURVATURA DA SUPERFÍCIE.

DEVEMOS ENTÃO INTEGRAR O ELEMENTO VETORIAL $d\vec{A}$



Considerando a figura anterior , a força agindo sobre o elemento de área $d\vec{A}$ é dada por

$$d\vec{F} = -p\,d\vec{A}$$

o sinal negativo indica que a força age em sentido oposto à normal da área.

A força resultante é dada por

$$\overline{F}_R = -\int_A p\,d\vec{A}$$

separando as componentes da força tem-se

$$\vec{F}_R = \hat{i}\,F_{R_x} + \hat{j}F_{R_y} + \hat{k}F_{Rz}$$

para avaliar a força em uma dada direção...

... tomamos o produto escalar da força pelo vetor unitário na direção considerada. Para a direção x temos

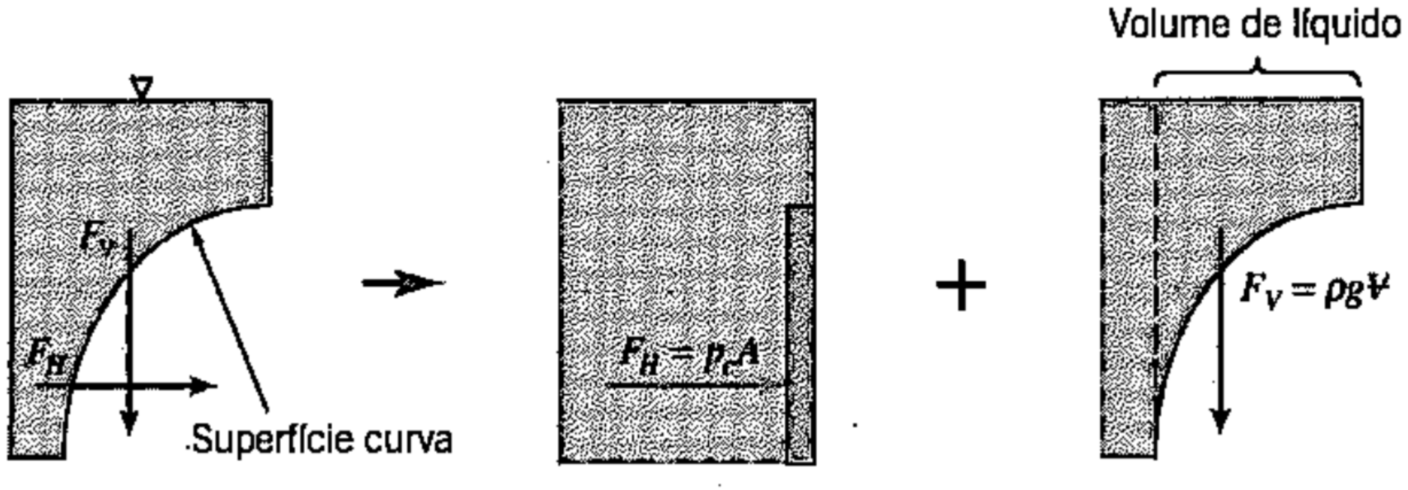
$$F_{R_x} = \vec{F}_R\,\hat{i} = \int d\vec{F}\,\hat{i} = -\int_A p\,d\vec{A}\,\hat{i} = -\int_{A_x} p\,dA_x$$

onde dA_x é a projeção de dA no plano perpendicular ao eixo x.

De uma forma geral, podemos escrever que

$$F_{Ri} = \int_{A_i} p\,dA_i$$

As forças horizontais e suas localizações são as mesmas que para uma superfície plana vertical imaginária da mesma área projetada.



A FORÇA LÍQUIDA VERTICAL É IGUAL AO PESO DO FLUÍDO DIRETAMENTE ACIMA DA SUPERFÍCIE.

PARA DETERMINAR A MAGNITUDE DA COMPONENTE VERTICAL DA FORÇA RESULTANTE.

$$F_{Rz} = F_v = \int p \, dA_z$$

COMO $p = \rho\, g\, h$

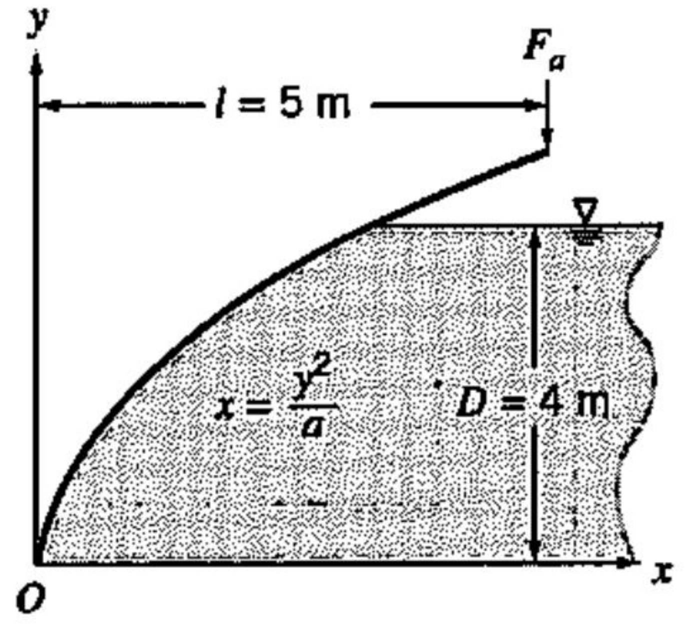
$$F_v = \int \rho\, g\, h\, dA_z = \int \rho\, g\, d\forall$$

$\rho\, g\, d\forall$ É O PESO DO CILINDRO DIFERENCIAL DE LÍQUIDO ACIMA DO ELEMENTO DE ÁREA DE SUPERFÍCIE.

A COMPONENTE VERTICAL DA FORÇA RESULTANTE É OBTIDA PELA INTEGRAÇÃO SOBRE A SUPERFÍCIE INTEIRA SUBMERSA.

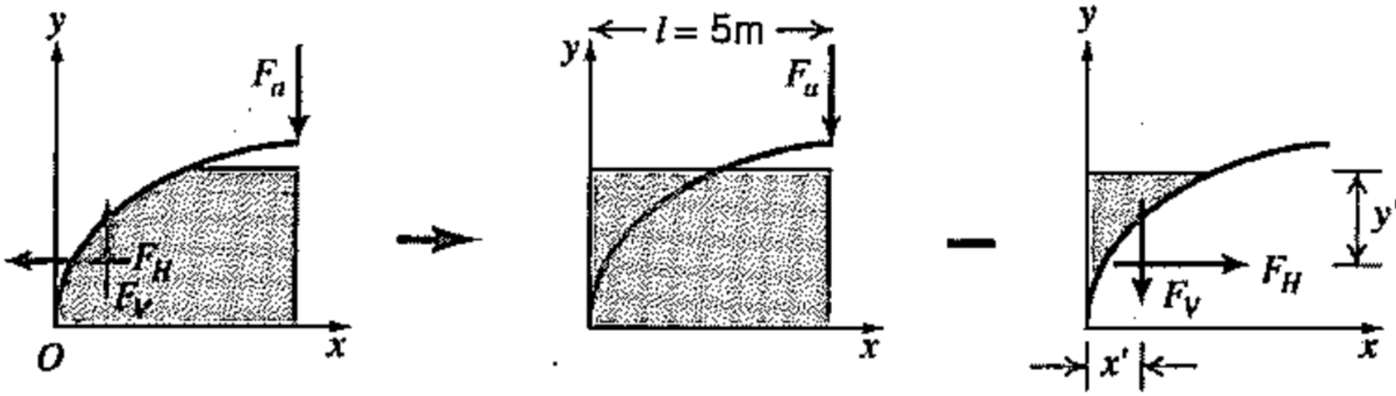
$$F_v = \int_{A_z} \rho\, g\, h\, dA_z = \int_{\forall} \rho\, g\, d\forall = \rho\, g\, \forall$$

A COMPORTA, MOSTRADA NA FIGURA ABAIXO, É ARTICULADA EM O E TEM LARGURA W=5M. A EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE É $x = {y^2}/{2}$,COM A=4M. A PROFUNDIDADE DA ÁGUA À DIREITA DA COMPORTA É D=4M. DETERMINE A MAGNITUDE DA FORÇA REQUERIDA PARA MANTER A COMPORTA FECHADA, SE O PESO DA MESMA FOR DESPREZADO.



Para solucionar, devemos tomar os momentos em relação ao ponto 0, após encontrar as forças vertical e horizontal. O diagrama de corpo livre (DCL) é mostrado abaixo.

Como não há Fv, podemos considerar que o sistema é igual ao DCL nulo menos o DCL com força do fluído (a=b-c na Figura abaixo).



(a) Sistema DCL (b) Forças de fluido nulas (c) Forças de fluido

Em resumo, a magnitude e a localização de Fv são dadas pelo peso e posição do centróide do fluido acima da comporta.

$$F_H = p_c A \qquad y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c} \qquad F_v = \rho\, g\, \forall$$

X' É O CENTRO DE GRAVIDADE

LOGO TEMOS QUE

$$y_c = h_c = D/2 \qquad A = Dw \qquad I_{xx} = wD^3/12$$

ASSIM

$$F_H = p_c A = \rho g h_c A \qquad F_H = 392kN$$

E $$y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{A y_c} = \frac{D}{2} + \frac{wD^3/12}{wD \;\; D/2} = \frac{D}{2} + \frac{D}{6} = \frac{2}{3} D$$

$$y' = 2{,}67m$$

Para calcular Fv é necessário calcular o peso de uma coluna d' água de volume diferencial $(D-y)w\,dx$

$$F_v = \rho\, g\, \forall = \rho g \int_0^{D^2/a} (D-y)w\,dx = \rho g w \int_0^{D^2/a} (D-\sqrt{a}\; x^{1/2})dx$$

$$F_v = \rho g w \left[(Dx - \frac{2}{3}\sqrt{a}\; x^{3/2}) \right]_0^{D^2/a} = \frac{\rho g w D^3}{3a} = 261kN$$

Para encontrarmos o valor de x', devemos calcular o momento em torno do eixo y.

$$x' F_v = \rho g \int_0^{D^2/a} x(D-y)w\,dx = \rho g w \int_0^{D^2/a} (Dx-\sqrt{a}\; x^{3/2})dx$$

$$x' F_v = \rho g w \left[\left(\frac{D}{2} x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{a}\, x^{5/2} \right) \right]_0^{D^2/a} = \frac{\rho g w D^5}{10a^2}$$

$$x' = \frac{\rho g w D^5}{10a^2 F_v} = 1{,}2m$$

TENDO DETERMINADO AS FORÇAS DO FLUÍDO, IREMOS CALCULAR A FORÇA PARA MANTER A COMPORTA FECHADA.

$$\sum M_0 = -lF_a + x' F_v + (D - y')F_H = 0$$

$$F_a = \frac{i}{l}\left[x' F_v + (D - y')F_H \right] = 167kN$$