

Capítulo 3

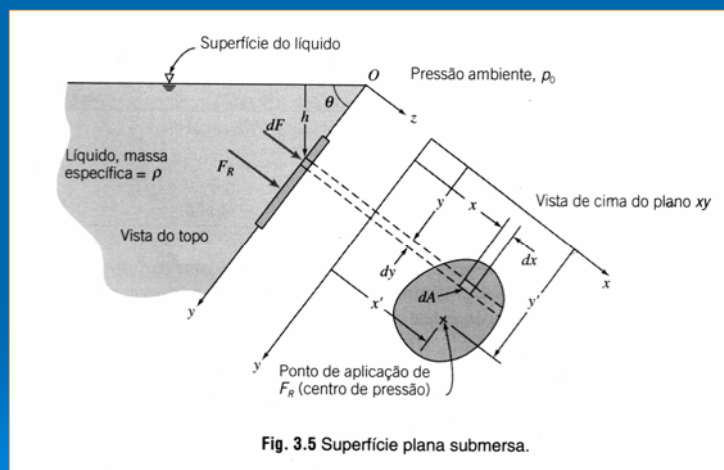
Seção 3.5

Forças Hidrostáticas sobre Superfícies Submersas

Para se determinar completamente a força resultante atuando sobre uma superfície submersa, devemos determinar:

1. A magnitude ou módulo da força
2. O sentido da Força
3. A linha de atuação da Força

Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana



Qual a magnitude da Força Resultante e o ponto de aplicação ?

Como estamos estudando a Hidrostática, logo não haverá tensões de cisalhamento já que o fluído encontra-se em repouso.

A força de pressão atuando sobre um elemento $dA=dx.dy$ da face superior é dada por:

$$dF = p dA$$

A força resultante agindo sobre a superfície é encontrada somando-se as contribuições das forças infinitesimais sobre a área inteira.

Logo a Magnitude é dada por:

$$F_R = \int_A p dA$$

Como p pode variar com a profundidade, podemos escrever que :

$$p = p_0 + \rho gh$$

Deve-se lembrar que p_0 é a pressão quando $h=0$, ou seja, na superfície do líquido

A partir da geometria do sistema, temos que

$$h = y \sen \theta$$

Substituindo estas expressões na equação da força resultante, obtemos:

$$F_R = \int_A p dA = \int_A (p_0 + \rho gh) dA$$

$$F_R = \int_A (p_0 + \rho g y \sen \theta) dA$$

$$F_R = p_0 \int_A dA + \rho g \sen \theta \int_A y dA$$

$$F_R = p_0 A + \rho g \sen \theta \int_A y dA$$

A integral $\int_A y dA$

é primeiro momento da área da superfície em torno do ponto **x**, que pode ser escrita como:

$$\int_A y dA = y_c A$$

onde **y_c** é a coordenada y do centróide da área A. Então,

$$F_R = p_0 A + \rho g \sin\theta y_c A$$

$$F_R = (p_0 + \rho g h_c) A$$

$$F_R = p_c A$$

onde **p_c** é a pressão absoluta do líquido na posição do centróide de área A.

O próximo passo é determinar a posição (x', y'), a localização do ponto de aplicação da força resultante.

Inicialmente iremos obter y', sabendo que o momento da força resultante em torno do eixo x deve ser igual ao momento devido à força distribuída de pressão.

Calculando a soma dos momentos das forças infinitesimais dF em torno do eixo x resulta que

$$y' F_R = \int_A y p dA$$

Devemos agora integrar, expressando p em função de y'.

$$y' F_R = \int_A y (p_0 + \rho g h) dA$$

$$y' F_R = \int_A (p_0 y + \rho g y^2 \sin\theta) dA$$

$$y' F_R = p_0 \int_A y dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA$$

A integral $\int_A y dA$

é o primeiro momento da área da superfície em torno do ponto **x**

Já a integral $\int_A y^2 dA$

é o segundo momento da área da superfície em torno do ponto **x** (I_{xx})

Pelo teorema do eixo paralelo (translação de eixo),

$$I_{xx} = I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2$$

para substituir o segundo momento pelo segundo momento de área padrão $I_{\hat{x}\hat{x}}$, em torno do eixo $\hat{x}$ com origem no centróide.

$$y' F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin \theta (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2)$$

$$y' F_R = y_c (p_0 + \rho g y_c \sin \theta) A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c (p_0 + \rho g h_c) A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c F_R + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}$$

Finalmente, obtemos para y'

$$y' = y_c + \frac{\rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R}$$

Cálculo da coordenada y' do lado submerso

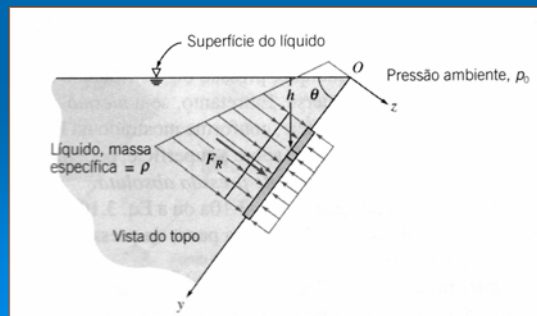
Se a mesma pressão atua sobre o outro lado da superfície, podemos usar a expressão acima eliminando a pressão p_0 .

$$F_R = p_{c_{manométrica}} A = \rho g y_c \sin\theta A$$

Finalmente obtemos a seguinte expressão:

$$y' = y_c + \frac{I_{\bar{x}\bar{x}}}{A y_c}$$

A equação acima serve para calcular a força líquida (diferença dos dois lados)



Para o cálculo de x' , realizaremos uma análise similar a y' .

Somando as forças dF em torno do eixo y , obtemos

$$x' F_R = \int_A x p dA$$

Podemos expressar p como função de y

$$x' F_R = \int_A x p dA = \int_A x (p_0 + \rho g h) dA$$

$$x' F_R = \int_A (p_0 x + \rho g x y \sin\theta) dA$$

$$x' F_R = p_0 \int_A x dA + \rho g \sin\theta \int_A x y dA$$

A integral $\int_A x dA = x_c A$

é o primeiro momento da área da superfície em torno do ponto **y**

Já a integral $\int_A y x dA = I_{xy}$

Usando ainda o teorema dos eixos paralelos

$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

Obtemos então

$$x' F_R = p_o x_c A + \rho g \sin \theta (I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c)$$

$$x' F_R = x_c (p_o + \rho g y_c \sin \theta) A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}$$

$$x' F_R = x_c (p_o + \rho g h_c) A + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}$$

$$x' F_R = x_c F_R + \rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}$$

Finalmente obtemos:

$$x' = x_c + \frac{\rho g \sin \theta I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}$$

Para a força líquida, temos:

$$x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{A y_c}$$